第22講　平面ベクトル(1)

1 [1]　△OAB において，$\mathrm{OA}=\sqrt{7}$，$\mathrm{OB}=1$，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$ とする．このとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ．

[2]　ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$，$\vec{c}=(2,\ 1)$ とする．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ として次の問に答えよ．

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，および $\cos\theta$ の値を求めよ．

(2)　t を実数とし，$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ とおく．$\vec{p}$ と $\vec{c}$ が垂直であるとき，および平行であるときの t の値をそれぞれ求めよ．

【Point Pickup】

[1]　ベクトルの内積

$\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を θ とすると，内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}=$　　　　　$\Leftrightarrow$　$\cos\theta=$

ベクトルの分割　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{O\ \ }}-\overrightarrow{\mathrm{O\ \ }}$

大きさ $|\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}|$ は，「　　」することで「　　　計算」に持ち込むことができる．

[2]　成分表示によるベクトルの内積

$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき

$|\vec{a}|=$　　　　　　　　$\vec{a}\cdot\vec{b}=$

また，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ が

垂直 $\Longleftrightarrow$ $\vec{a}\cdot\vec{b}=$　　　つまり

平行 $\Longleftrightarrow$ $\vec{a}=\quad\vec{b}$　　つまり $\begin{cases} a_1=\quad b_1 \\ a_2=\quad b_2 \end{cases}$ より

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2 ［1］　△OAB において，辺 OA を 2：3，辺 OB を 3：4 に内分する点をそれぞれ D，E とする．また，線分 AE と線分 BD の交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

［2］　△ABC の辺 BC を 2：1 に内分する点を P とし，線分 AP 上に点 Q がある．等式 $4\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+2\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\vec{0}$ が成り立つとき，$\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QP}}$ の値を求めよ．

【Point Pickup】

［1］　1 次結合

平面上のベクトル $\vec{p}$ は，同じ平面上の「　　　　」である 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ と実数 s，t を用いて　$\vec{p}=s\vec{a}+t\vec{b}$ の形で「　　　　　　」に表せる．

内分を表すベクトル

線分 AB を

$s:t$ に内分する点を P とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=$　　　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+$　　　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

$t:(1-t)$ に内分する点を Q とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=$　　　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+$　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

［2］　ベクトルの伸縮

直線 AB 上に点 P があるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=$　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$　と表せる．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　平行四辺形OABCについて，辺ABを1：2に内分する点をDとし，線分CDを3：4に内分する点をEとする．また，直線OEと辺BCとの交点をFとする．

(1)　$\overrightarrow{OF}$を$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$を用いて表せ．

(2)　△CEFの面積は平行四辺形OABCの面積の何倍か．

【Point Pickup】

「平行」を含む図形

$\vec{a}$と$\vec{p}$が平行のとき，$\vec{p}=k\vec{a}$と表せる．よって，平行を含む図形では「　　　　」によるベクトルの表現が有効である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第22講　平面ベクトル(1)

［1］　△ABCにおいて，AB＝1，AC＝5，BC＝$2\sqrt{5}$のとき，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$＝［ア］である．

［2］　2つのベクトル$\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$，$\vec{c}=(2,\ -2)$について，$\vec{a}+t\vec{b}$と$\vec{c}$が垂直となるのは$t=\dfrac{［イ］}{［ウ］}$のときであり，平行となるのはt＝［エオ］のときである．

［3］　平行四辺形OABCにおいて，辺AB上に点DをAD：DB＝2：1となるようにとり，BCの中点をEとする．直線ODと直線AEの交点をFとするとき，

$\dfrac{\mathrm{OF}}{\mathrm{OD}}=\dfrac{［カ］}{［キ］}$，$\dfrac{\mathrm{AF}}{\mathrm{AE}}=\dfrac{［ク］}{［ケ］}$である．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⓒRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 22 講　平面ベクトル(1)

1 ［1］　△OAB において，$\mathrm{OA}=\sqrt{7}$，$\mathrm{OB}=1$，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$ とする．このとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を求めよ．

∠AOB＝θ とすると，余弦定理により

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{OA}^2+\mathrm{OB}^2-\mathrm{AB}^2}{2\cdot\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}}=\frac{7+1-3}{2\cdot\sqrt{7}\cdot1}=\frac{5}{2\sqrt{7}}$$

よって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\theta=\sqrt{7}\times1\times\frac{5}{2\sqrt{7}}=\boldsymbol{\frac{5}{2}}$

(別解)　$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{3}$　より　$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{3}$　　$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=3$

$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=3$　　$1-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+7=3$　　よって　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{5}{2}$

1 ［2］　ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(3,\ 4)$，$\vec{c}=(2,\ 1)$ とする．$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ として次の問に答えよ．

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$，および $\cos\theta$ の値を求めよ．

(2)　t を実数とし，$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}$ とおく．$\vec{p}$ と $\vec{c}$ が垂直であるとき，および平行であるときの t の値をそれぞれ求めよ．

(1)　$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times3+3\times4=\boldsymbol{15}$　　　$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{15}{\sqrt{10}\times5}=\boldsymbol{\frac{3}{\sqrt{10}}}$

(2)　$\vec{p}=\vec{a}+t\vec{b}=(1,\ 3)+t(3,\ 4)=(1+3t,\ 3+4t)$

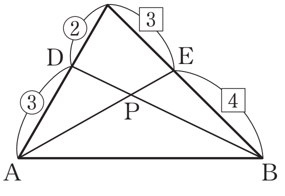
$\vec{p}\perp\vec{c}$ のとき　$\vec{p}\cdot\vec{c}=0$　つまり　$(1+3t)\times2+(3+4t)\times1=0$　よって　$\boldsymbol{t=-\frac{1}{2}}$

$\vec{p}\parallel\vec{c}$ のとき　$(1+3t)\times1-(3+4t)\times2=0$　　よって　$\boldsymbol{t=-1}$

2 ［1］　△OAB において，辺 OA を 2：3，辺 OB を 3：4 に内分する点をそれぞれ D，E とする．また，線分 AE と線分 BD の交点を P とする．$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ．

AP：PE＝t：$(1-t)$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OE}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{3}{7}t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　……①

DP：PB＝s：$(1-s)$ とすると　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OD}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{2}{5}(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+s\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　……②



$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立より①，②から　$1-t=\frac{2}{5}(1-s)$，$\frac{3}{7}t=s$

これらより　$s=\frac{9}{29}$，$t=\frac{21}{29}$

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{8}{29}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{9}{29}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$　より

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\boldsymbol{-\frac{21}{29}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{9}{29}\overrightarrow{\mathrm{OB}}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(別解)　メネラウスの定理により $\dfrac{\mathrm{OB}}{\mathrm{BE}}\cdot\dfrac{\mathrm{EP}}{\mathrm{PA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DO}}=1$　つまり　$\dfrac{7}{4}\cdot\dfrac{\mathrm{EP}}{\mathrm{PA}}\cdot\dfrac{3}{2}=1$

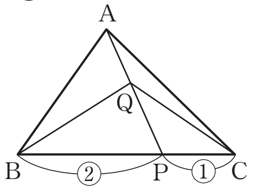
よって　$\dfrac{\mathrm{EP}}{\mathrm{PA}}=\dfrac{8}{21}$　　したがって　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{8}{29}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{21}{29}\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{8}{29}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{9}{29}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

2 [2]　△ABC の辺 BC を 2：1 に内分する点を P とし，線分 AP 上に点 Q がある．等式 $4\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+2\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\vec{0}$ が成り立つとき，$\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QP}}$ の値を求めよ．

t を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\left(\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)=\dfrac{1}{3}t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{3}t\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　……①　とおく．

$4\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+\overrightarrow{\mathrm{BQ}}+2\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\vec{0}$　より

$4\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+(\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}})+2(\overrightarrow{\mathrm{AQ}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})=\vec{0}$　　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{1}{7}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$　……②



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は1次独立より，①，②から

$\dfrac{1}{3}t=\dfrac{1}{7}$，$\dfrac{2}{3}t=\dfrac{2}{7}$　　これらは　$t=\dfrac{3}{7}$ のとき，ともに成立する．

したがって　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{AP}}$　より　$\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{QP}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{4}}$

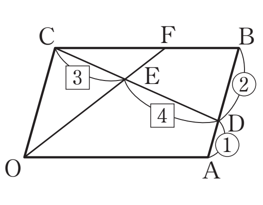
3　平行四辺形 OABC について，辺 AB を 1：2 に内分する点を D とし，線分 CD を 3：4 に内分する点を E とする．また，直線 OE と辺 BC との交点を F とする．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ．

(2)　△CEF の面積は平行四辺形 OABC の面積の何倍か．

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\dfrac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\dfrac{3}{7}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)=\dfrac{3}{7}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{5}{7}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より t，s を実数として

$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=t\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{3}{7}t\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{5}{7}t\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　……①



また，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+s\overrightarrow{\mathrm{CB}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　……②

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は1次独立より，①，②から

$\dfrac{3}{7}t=s$，$\dfrac{5}{7}t=1$　　よって　$t=\dfrac{7}{5}$，$s=\dfrac{3}{5}$

したがって，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\boldsymbol{\dfrac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}}$

(2)　(1)より　OE：EF＝5：2，CF：FB＝3：2

よって，平行四辺形 OABC の面積を S とすると

$\triangle\mathrm{CEF}=\dfrac{2}{7}\triangle\mathrm{COF}=\dfrac{2}{7}\times\dfrac{3}{5}\triangle\mathrm{COB}=\dfrac{6}{35}\times\dfrac{1}{2}S=\dfrac{3}{35}S$　　よって　$\boldsymbol{\dfrac{3}{35}}$ **倍**

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第22講　平面ベクトル(1)

[1]　△ABCにおいて，AB＝1，AC＝5，BC＝$2\sqrt{5}$ のとき，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$＝［ア］である．

[2]　2つのベクトル $\vec{a}=(1,\ 3)$，$\vec{b}=(2,\ -1)$，$\vec{c}=(2,\ -2)$ について，$\vec{a}+t\vec{b}$ と $\vec{c}$ が垂直となるのは $t=\dfrac{［イ］}{［ウ］}$ のときであり，平行となるのは t＝［エオ］のときである．

[3]　平行四辺形OABCにおいて，辺AB上に点DをAD：DB＝2：1となるようにとり，BCの中点をEとする．直線ODと直線AEの交点をFとするとき，

$\dfrac{\text{OF}}{\text{OD}}=\dfrac{［カ］}{［キ］}$，$\dfrac{\text{AF}}{\text{AE}}=\dfrac{［ク］}{［ケ］}$ である．

解答例

[1]　∠BAC＝θ とすると，$\cos\theta=\dfrac{\text{AB}^2+\text{AC}^2-\text{BC}^2}{2\cdot\text{AB}\cdot\text{AC}}=\dfrac{1+25-20}{2\cdot1\cdot5}=\dfrac{3}{5}$

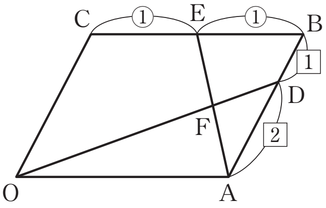
よって　$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=|\overrightarrow{AB}||\overrightarrow{AC}|\cos\theta=1\times5\times\dfrac{3}{5}=\mathbf{3}$

[2]　$\vec{a}+t\vec{b}=(1+2t,\ 3-t)$

$(\vec{a}+t\vec{b})\perp\vec{c}$ より　$(1+2t)\times2+(3-t)\times(-2)=0$　よって　$t=\mathbf{\dfrac{2}{3}}$

$(\vec{a}+t\vec{b})\,/\!/\,\vec{c}$ より　$(1+2t)\times(-2)-(3-t)\times2=0$　よって　$t=\mathbf{-4}$

[3]　点Fは線分OD上の点より，s を実数として



$\overrightarrow{OF}=s\overrightarrow{OD}=s\left(\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AB}\right)=s\overrightarrow{OA}+\dfrac{2}{3}s\overrightarrow{OC}$　……①

と表せる．

また，点Fは線分AE上の点より，t を実数として

$\overrightarrow{OF}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OE}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\left(\overrightarrow{OC}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right)=\left(1-\dfrac{1}{2}t\right)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OC}$　……②

と表せる．

$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OC}$ は1次独立より，①，②から　$s=1-\dfrac{1}{2}t$，$\dfrac{2}{3}s=t$　　$s=\dfrac{3}{4}$，$t=\dfrac{1}{2}$

よって　$\dfrac{\text{OF}}{\text{OD}}=\mathbf{\dfrac{3}{4}}$，$\dfrac{\text{AF}}{\text{AE}}=\mathbf{\dfrac{1}{2}}$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。